Prueba de Cátedra 2: Inferencia Estadística

Prof. Ronny Vallejos
Máximo puntaje: 60 puntos

Problema 1. Considere la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proveniente de una población con densidad dada por

$$f(x, \sigma) = Kx^2 e^{-x^2/2\sigma^2}, \ -\infty < x < \infty, \ \sigma > 0.$$

a) Encuentre la constante K. [5 puntos]
b) Encuentre el EIVUM para σ^2. [10 puntos]

Problema 2. Sea $X \sim Bin(n, p)$ y sea $\psi_X(t)$ su función generadora de momentos. Derive el test UMP para las hipótesis

$$H_0 : \psi_X(1) \leq \left(\frac{e+1}{2}\right)^n \text{ versus } H_1 : \psi_X(1) > \left(\frac{e+1}{2}\right)^n.$$

Justifique sus argumentos. [10 puntos]
Ayuda: Use el lema de Neyman Pearson.

Problema 3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución de Poisson con parámetro λ.

a) Encuentre el test UMP para las hipótesis $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ versus $H_1 : \lambda > \lambda_0$. [10 puntos]
b) Considere el caso específico $H_0 : \lambda \leq 1$ versus $H_1 : \lambda > 1$. Use el teorema del limite central para determinar el tamaño muestral n tal que el test UMP satisfaga $P(\text{rechazar } H_0 | \lambda = 1) = 0.05$ y $P(\text{rechazar } H_0 | \lambda = 2) = 0.9$. [5 puntos]

Problema 4. Suponga que disponemos de dos muestras aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ provenientes de una distribución exponencial con parámetro θ e $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ provenientes de una distribución exponencial con parámetro μ.

a) Encuentre el cuociente de verosimilitud para las hipótesis $H_0 : \theta = \mu$ versus $H_1 : \theta \neq \mu$. [10 puntos]
b) Demuestre que el test en la parte a) puede expresarse como función del estadístico

$$T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}.$$

[5 puntos]
c) Encuentre la distribución de T bajo H_0. [5 puntos]

Good luck